Труды Международной летней математической
Школы-Конференции С. Б. Стечкина по теории функций
Таджикистан, Душанбе, 15–25 августа, 2016. С. 182–185

Задачи интерполяции с минимальным значением нормы оператора Лапласа на классах интерполируемых данных

С. И. Новиков

*Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Институт математики и компьютерных наук Уральского федерального университета
им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия*

Аннотация. Работа посвящена исследованию задач интерполирования класса ограниченных в l_p-норме $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ последовательностей функциями с минимальным значением L_p-нормы оператора Лапласа.

Прежде всего введем нужные обозначения и сформулируем постановку задачи.

Пусть $n \geqslant 2,\ 1 \leqslant p \leqslant \infty$. Для произвольной последовательности вещественных чисел $z = \{z_j\}_{j\in\mathbb{Z}^n}$ полагаем

$$\|z\|_{l_p(\mathbb{Z}^n)} = \begin{cases} \Big(\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}^n} |z_j|^p\Big)^{1/p}, & 1 \leqslant p < \infty, \\ \sup\limits_{j\in\mathbb{Z}^n} |z_j|, & p = \infty \end{cases}$$

и определяем класс интерполируемых последовательностей следующим образом:

$$\mathfrak{M}_p \ = \ \{z : \ z = \{z_j\}_{j\in\mathbb{Z}^n}, \ \|z\|_{l_p(\mathbb{Z}^n)} \leqslant 1\}.$$

Пусть $C^m(\mathbb{R}^n)$ — множество функций, определенных на $\mathbb{R}^n$, у которых существуют и непрерывны на $\mathbb{R}^n$ все производные до порядка m включительно, $C^0(\mathbb{R}^n) = C(\mathbb{R}^n)$ — множество непрерывных на $\mathbb{R}^n$ функций. Через $L_p(\mathbb{R}^n)$ обозначаем стандартное пространство Лебега функций, интегрируемых на $\mathbb{R}^n$ с p-й степенью при $1 \leqslant p < \infty$ и существенно ограниченных при $p = \infty$, снабженное нормой

$$\|f\|_p = \begin{cases} \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\,dx\Bigg)^{1/p}, & 1 \leqslant p < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)|, & p = \infty. \end{cases}$$

Далее через $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ обозначаем пространство бесконечно дифференцируемых на $\mathbb{R}^n$ функций, а через $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ — пространство бесконечно дифференцируемых финитных функций.

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$, $D^\alpha u = \partial^{|\alpha|} u / \partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}$ — производная порядка α, понимаемая в обобщенном смысле

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 14-01-00496а) и комплексной программы УрО РАН "Современные проблемы теории функций и приложения,

Соболева (слабая производная), т. е. $v = D^\alpha u$, если $\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ справедливо равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} v(x)\varphi(x)\,dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_{\mathbb{R}^n} u(x) D^\alpha \varphi(x)\,dx.$$

Как известно (см., например, [1]), функция f принадлежит пространству Соболева $W_p^l(\mathbb{R}^n)$, если $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, для любого мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha| = l$ существует производная $D^\alpha f$ в обобщенном смысле Соболева и норма

$$\|f\|_{p,l} = \|f\|_p + \sum_{|\alpha|=l} \|D^\alpha f\|_p$$

конечна. Всюду далее

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

— оператор Лапласа.

Класс функций, интерполирующих фиксированную последовательность $z \in \mathfrak{M}_p$ в точках с целочисленными координатами, определяем следующим образом:

$$Y_p(z) \ = \ \left\{ u \in C^1(\mathbb{R}^n) \cap W_p^2(\mathbb{R}^n) : \ u(j) = z_j \ \ \forall j \in \mathbb{Z}^n \right\}.$$

Целью настоящей работы является изучение величины

$$A_p(\mathbb{R}^n) \ = \ \sup_{z \in \mathfrak{M}_p} \ \inf_{u \in Y_p(z)} \ \|\Delta u\|_p, \tag{1}$$

которую можно интерпретировать как L_p-норму оператора Лапласа, примененного к “наилучшей” функции из класса $Y_p(z)$ при интерполировании “наихудшей” последовательности $z \in \mathfrak{M}_p$.

Для фиксированной последовательности $z \in \mathfrak{M}_p$ задача $\|\Delta u\|_p \longrightarrow \inf\limits_{u \in Y_p(z)}$ представляет собой вариант интерполяционной проблемы типа Фавара (см., например, [2], [3], [4]). Поэтому задачу нахождения величины (1) можно рассматривать как интерполяционную проблему типа Фавара для всего класса $\mathfrak{M}_p$ интерполируемых последовательностей.

Также заметим, что величина (1) близка постановкам задач экстремальной функциональной интерполяции [5], [6], однако в настоящей работе класс интерполируемых последовательностей определен несколько иначе, чем в этих и других работах, посвящённых задачам экстремальной функциональной интерполяции.

Для $p = \infty$ величина (1) ранее изучалась в работах автора [7], [8]. В частности, в [8] было доказано, что $2/9 \leqslant A_\infty(\mathbb{R}^2) \leqslant 36$.

В работе автора [9] установлено, что если $1 \leqslant p < n/2$, то $A_p(\mathbb{R}^n) = 0$. Сопоставление этого факта с теоремой вложения классов Соболева $W_p^l(\mathbb{R}^n)$ в пространство $C(\mathbb{R}^n)$ показывает, что исследуемая величина равна нулю в тех случаях, когда пространство Соболева $W_p^2(\mathbb{R}^n)$ не вкладывается в пространство непрерывных функций. Поэтому при $p = 2$ нетривиальными с точки зрения величины $A_p(\mathbb{R}^n)$ являются только три размерности: $n = 2, 3, 4$.

Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема. *Справедливы следующие неравенства:*

$$\frac{\sqrt{\sqrt[4]{2} - 1}}{\sqrt[4]{2}} \leqslant A_2(\mathbb{R}^2) \leqslant 12\sqrt{2}\,. \tag{2}$$

Доказательство. Оценка снизу была получена автором [9]. Для того, чтобы доказать оценку сверху, используем интерполяционный процесс, построенный на основе ZP-элемента. С помощью такого интерполяционного процесса в [8] была получена оценка сверху величины (2) при $p = \infty$, $n = 2$. ZP-элемент является представителем обширного семейства функций, называемых box-сплайнами [10]. Перечислим нужные нам свойства ZP-элемента (их доказательства можно найти, например, в [10], [11]):

1) $M_{ZP} \in C^1(\mathbb{R}^2)$;

2) носитель $M_{ZP}(x,y)$ представляет собой восьмиугольник, получающийся отрезанием углов квадрата $[-1,2]\times[0,3]$;

3) $M_{ZP}(x,y)>0$ во всех внутренних точках её носителя;

4) $M_{ZP}(x,y)$ достигает максимума в единственной точке $(1/2;3/2)$;

5) $M_{ZP}(x,y)$ является кусочно-квадратичной функцией по каждой из переменных.

Явный вид функции $M_{ZP}(x,y)$ представлен на рисунке её носителя в [11, p. 149], [8], где внутри каждого элемента разбиения носителя написано соответствующее выражение. Из явного вида ZP-элемента непосредственными вычислениями получаем

$$\|\Delta M_{ZP}\|_2 = 2\sqrt{2}\,. \tag{3}$$

Разбиваем $\mathbb{R}^2$ на квадраты V_j с центрами в точках $j=(j_1,j_2)\in\mathbb{Z}^2$ и сторонами, параллельными осям координат и равными единице. Для каждого $j\in\mathbb{Z}^2$ определяем функцию F_j, полагая $F_j(x,y)=c_jM_{ZP}(3x-3j_1+1/2,3y-3j_2+3/2)$ на V_j и равной нулю вне V_j. Найдя константы c_j из интерполяционных условий $F_j(j_1,j_2)=z_j$, получаем $c_j=2z_j$. Пусть

$$F(x,y)=\sum_{j\in\mathbb{Z}^2}F_j(x,y).$$

Заметим, что в каждой точке $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ сумма в правой части содержит не более одного отличного от нуля слагаемого. Нетрудно видеть, что $F\in Y_2(z)$ для любой последовательности $z\in\mathfrak{M}_2$. Теперь вычисляем L_2-норму функции ΔF.

$$\|\Delta F\|_2 = 2\left(\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\left|\sum_{j\in\mathbb{Z}^2} z_j\ \Delta M_{ZP}\left(3x-3j_1+\frac{1}{2},3y-3j_2+\frac{3}{2}\right)\right|^2 dx\ dy\right)^{1/2} =$$

$$= 2\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}^2}|z_j|^2\ \iint\limits_{V_j}\left|\Delta M_{ZP}\left(3x-3j_1+\frac{1}{2},3y-3j_2+\frac{3}{2}\right)\right|^2 dx\ dy\right)^{1/2} =$$

$$= 6\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}^2}|z_j|^2\right)^{1/2}\cdot\left(\int_{-1}^{2}\int_{0}^{3}|\Delta M_{ZP}(u,v)|^2du\ dv\right)^{1/2} = 6\ \|z\|_{l_\infty(\mathbb{Z}^2)}\ \|\Delta M_{ZP}\|_2 \leqslant 12\sqrt{2}\,.$$

Мы воспользовались тем, что внутренности носителей "соседних" функций F_j не пересекаются, в интеграле выполнили замену переменных $u=3x-3j_1+1/2,\ v=3y-3j_2+3/2$ и применили (3). Теорема доказана.

Приближённо оценка (2) записывается в виде $0.36576...\leqslant A_2(\mathbb{R}^2)\leqslant 16.97056...$, что в части оценки сверху несколько точнее соответствующего результата работы [9]. К сожалению, полученные в теореме оценки сверху и снизу оказываются достаточно далекими друг от друга и тем самым от точного значения величины $A_2(\mathbb{R}^2)$.

Список литературы

1. *Burenkov V.I.* Sobolev spaces on domains. Stuttgart: B. G. Teubner Verlag GmbH, 1998. 312 p. (Teubner Texts in Math. Vol. 137.)
2. *Favard J.* Sur l'interpolation // J. Math. Pures Appl. 1940. Vol. 19, № 9. P. 281–306.
3. *Fisher S., Jerome J.* Minimum norm extremals in function spaces // Lecture Notes in Math. 1975. Vol. 479. P. 1–209.
4. *Тихомиров В.М., Боянов Б.Д.* О некоторых выпуклых задачах теории приближений // Serdica. 1979. Vol. 5, № 1. P. 83–96.

5. *Субботин Ю.Н.* Функциональная интерполяция в среднем с наименьшей n-й производной // Труды МИАН СССР. 1967. Т. 88. С. 30–60.
6. *Новиков С.И.*, *Шевалдин В.Т.* Об одной задаче экстремальной интерполяции для функций многих переменных // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2001. Т. 7, № 1. С. 144–159.
7. *Novikov S.I.* Interpolation in $\mathbb{R}^2$ with minimum value of the uniform norm of the Laplace operator // J. Math. and System Science. 2013. Vol. 3, № 2. P. 55–61.
8. *Новиков С.И.* Об оценках равномерной нормы оператора Лапласа наилучших интерполянтов на классе ограниченных интерполируемых данных // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 1. С. 191–196.
9. *Новиков С.И.* Интерполяция функциями пространства Соболева с минимальной L_p-нормой оператора Лапласа // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 4. С. 212–222.
10. *de Boor C.*, *Höllig K.*, *Riemenschneider S.* Box splines. New York etc.: Springer, 1993. 200 p.
11. *de Concini C.*, *Procesi C.* Topics in hyperplane arrangements, polytopes and box-splines. New York etc.: Springer, 2010. 384 p.